آزمون شبیه ساز امتحان نهایی ماز

دوازدهم ریاضی

گروه آموزشی ماز

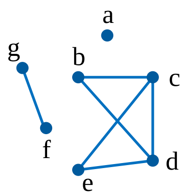
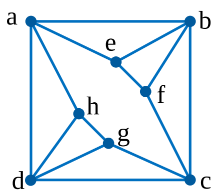
پیش‌بینی امتحان نهایی

خردادماه ۱۴۰۳

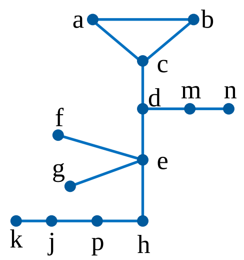
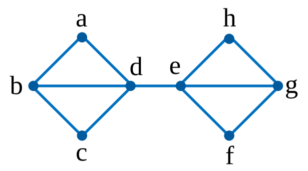
ردیف	درس	تعداد صفحه	زمان پاسخگویی
۱	ریاضیات گسسته	۲	۱۲۰

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **ریاضیات گسسته**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **خردادماه ۱۴۰۳**	مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **ریاضی فیزیک**	پایهٔ **دوازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۲ صفحه**

آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی — **گروه آموزشی ماز**

ردیف	سؤالات (پاسخ‌برگ دارد) [استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می‌باشد]	نمره
۱	درست یا نادرست بودن عبارات زیر را مشخص کنید. الف) اگر α یک عدد گویا و β گنگ باشد، $3\alpha+\beta$ همواره گنگ است. ب) مجموعهٔ احاطه‌گر یک گراف تهی، مینیمال است. ج) اگر n عددی صحیح باشد، آن‌گاه $3 \mid n^3-n$. د) دو مربع لاتین متعامد 6×6 وجود دارد.	۱
۲	در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. الف) مجموعه احاطه‌گر مینیمم یک گراف کامل، .... عضو دارد. ب) گراف ۳- منتظم مرتبه ۶ دارای .... یال است. ج) حداقل .... تا عدد طبیعی باید داشته باشیم تا مطمئن باشیم، جمع دو تا از آن‌ها حتماً زوج می‌شود.	۱/۵
۳	ثابت کنید برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y داریم: $(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})(x+y)\geq 4$	۱
۴	در صورتی که m عدد صحیح باشد، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک $7m+6$ و $6m+5$ را به‌دست آورید.	۱/۵
۵	اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد، در این صورت، باقی‌مانده تقسیم عدد $2a+3$ بر ۸ را به‌دست آورید.	۱/۵
۶	جواب‌های عمومی معادلهٔ سیاله $2x+5y=29$ را به‌دست آورید.	۱/۵
۷	با اضافه کردن ۳۰ یال به گراف ۶- منتظم، گراف کامل درست می‌شود، مرتبه این گراف را به‌دست آورید.	۰/۷۵
۸	گراف G شکل مقابل را در نظر بگیرید: الف) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید. ب) یک مسیر به طول ۳ با شروع از رأس b بنویسید. ج) $N_G(f)$ را با اعضاء مشخص کنید.  	۰/۷۵
۹	گراف مقابل را در نظر بگیرید. الف) یک مجموعه احاطه‌گر ۴ عضوی بنویسید. ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال بنویسید. ج) عدد احاطه‌گری این گراف را بیابید.  	۱/۵
۱۰	الف) گرافی رسم کنید که عدد احاطه‌گری آن $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ نباشد. ب) گرافی رسم کنید که عدد احاطه‌گری آن $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ باشد.	۱/۵
	ادامهٔ سؤالات در صفحهٔ بعد	

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **ریاضیات گسسته**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **خردادماه ۱۴۰۳**	مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **ریاضی فیزیک**	پایهٔ **دوازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۲ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	سؤالات (پاسخ‌برگ دارد) [استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می‌باشد]	نمره
۱۱	در گراف مقابل، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد. 	۰/۵
۱۲	گراف شکل مقابل چند $\gamma-$ مجموعه دارد؟ 	۰/۷۵
۱۳	۶ دانش‌آموز رشتهٔ تجربی و ۵ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی به چند طریق می‌توانند کنار هم در یک ردیف قرار گیرند به‌طوری‌که: الف) دانش‌آموزان به صورت یک در میان قرار بگیرند. ب) دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی همواره کنار هم باشند.	۱
۱۴	معادله $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=17$، چند جواب صحیح و نامنفی دارد، به شرط آن‌که $x_5=2$ و $x_1>2$ باشند؟	۱/۲۵
۱۵	قرار است در یک تعمیرگاه ۳ مکانیک خودرو، در ۳ روز مختلف روی ۳ سمند و ۳ پژو متفاوت، جهت تعمیر کار کنند، برنامه‌ای برای این تعمیرگاه بنویسید که تداخلی در تعمیر خودروها و روزها ایجاد نشود.	۱/۵
۱۶	مطلوب است تعداد اعداد سه رقمی که در هر یک از آن‌ها هرکدام از ارقام ۲ و ۹ حداقل یک بار ظاهر شده باشند.	۱/۵
۱۷	حداقل چند نفر در یک سالن همایش حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم دست کم ۳ نفر وجود دارند که دو حرف اول و دوم نام‌خانوادگی آن‌ها یکسان و حروف غیر تکراری است؟	۱
	موفق باشید.	۲۰

آزمون شبیه ساز امتحان نهایی ماز

دوازدهم ریاضی

شبیه ساز امتحانات نهایی

گروه آموزشی ماز

پاسخبرگ آزمون

پیش‌بینی امتحان نهایی

خردادماه ۱۴۰۳

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **ریاضیات گسسته**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **خردادماه ۱۴۰۳**	مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **ریاضی فیزیک**	پایهٔ **دوازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۴ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	پاسخ‌برگ	نمره
	پاسخ‌های خود را به‌صورت دقیق، خوش‌خط و مرتب در این برگه وارد کنید.	
۱	الف) .... ب) .... ج) .... د)	۱
۲	الف) .... ب) .... ج)	۱/۵
۳		۱
۴		۱/۵
۵		۱/۵
۶		۱/۵

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **ریاضیات گسسته**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **خردادماه ۱۴۰۳**	مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **ریاضی فیزیک**	پایهٔ **دوازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۴ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	پاسخ‌برگ	نمره
۷		۰/۷۵
۸	الف) ب) ج)	۰/۷۵
۹	الف) ب) ج)	۱/۵
۱۰	الف) ب)	۱/۵

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **ریاضیات گسسته**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **خردادماه ۱۴۰۳**	مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **ریاضی فیزیک**	پایهٔ **دوازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۴ صفحه**

آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی **گروه آموزشی ماز**

ردیف	پاسخ‌برگ	نمره
۱۱		۰/۵
۱۲		۰/۷۵
۱۳	الف) ب)	۱
۱۴		۱/۲۵
۱۵		۱/۵

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **ریاضیات گسسته**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **خردادماه ۱۴۰۳**	مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **ریاضی فیزیک**	پایهٔ **دوازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۴ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	پاسخ‌برگ	نمره
۱۶		۱/۵
۱۷		۱
	موفق باشید.	۲۰

آزمون شبیه ساز امتحان نهایی ماز

دوازدهم ریاضی

پیش‌بینی امتحان نهایی

گروه آموزشی ماز

خردادماه ۱۴۰۳

پاسخنامهٔ تشریحی (حاوی راهنمای مصحّح)

درس	مسئول درس	ویراستاران
ریاضیات گسسته	محدثه شیخعلی - جواد نظری	علیرضا کاظمی بقا - مریم نظری

راهنمای پاسخنامه برای بچه‌های مازی!

مصحح شو:

پاسخ دقیق سؤال این‌جا میاد و اسمش روشه: «مصحح شو»، می‌خواد شما رو به یه مصحح حرفه‌ای و دقیق تبدیل کنه که بدونین موقع ارزیابی جواب‌هاتون باید حواستون به چی باشه تا توی آزمون‌های بعدی دقیق‌تر عمل کنین. اگه جواب یه سؤال رو بشه به شکل‌های مختلف بیان کرد، اون هم، این‌جا بهتون گفتیم.

بررسی دقیق‌تر:

اگه پاسخ کوتاه یه سؤال کافی نباشه تا ببینین چطوری باید به جواب برسین، توی این بخش با بررسی دقیق‌ترِ جواب، سؤال رو براتون توضیح دادیم.

نقشهٔ نهایی:

امتحان نهایی قوانین و قواعد خاص خودش رو داره؛ شما باید بدونین تیپ‌های رایج سؤال‌های امتحان نهایی چیه و باید چطوری بهش جواب بدین. این کادر، مشاورهٔ حرفه‌ای ماست به شما تا فوت و فن‌های امتحان نهایی رو یاد بگیرین.

۲۰ شو:

توی «۲۰ شو»، مبحث هر سؤال رو براتون مرور یا جمع‌بندی کردیم؛ «۲۰ شو» و درس‌نامه‌هاش دقیقاً فاصلهٔ بین نمرهٔ خوب و نمرهٔ ۲۰ رو براتون پر می‌کنه.

نکتهٔ طلایی:

با وجود «۲۰ شو»، که کلی درس‌نامهٔ مفصل داره، باز هم اگه نکتهٔ مهم و مفیدی بود، توی این کادر براتون آوردیم.

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **ریاضیات گسسته**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **خردادماه ۱۴۰۳**	مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **ریاضی فیزیک**	پایهٔ **دوازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۱۹ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	پاسخ‌نامه	نمره
۱	مصحح شو: الف) درست (۰/۲۵) ب) درست (۰/۲۵) ج) درست (۰/۲۵) د) نادرست (۰/۲۵) اثبات به روش برهان خلف: برهان خلف نوعی اثبات غیرمستقیم است که در آن فرض می‌کنیم که حکم نادرست باشد و سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض، به یک نتیجه غیرممکن و یا نتیجه‌ای متضاد با فرض مسئله می‌رسیم و در نهایت معلوم می‌شود که فرض نادرست بودن حکم، باطل است و درستی حکم ثابت می‌گردد. **مثال:** اگر α و β دو عدد گنگ باشند، ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha-\beta$ گنگ است. فرض خلف: فرض می‌کنیم $\alpha-\beta$ گویا باشد. می‌دانیم جمع دو عدد گویا، عددی گویا است، پس: $(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)\in\mathbb{Q}\Rightarrow ۲\alpha\in\mathbb{Q}\Rightarrow\alpha\in\mathbb{Q}$ از طرفی، طبق فرض مسئله می‌دانیم که α عددی گنگ است که با نتیجه فوق $(\alpha\in\mathbb{Q})$ در تناقض است، لذا فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود.	۱
۲	مصحح شو: الف) یک (۰/۵) ب) $۹=\frac{۳\times۶}{۲}$ (۰/۵) ج) ۳ (۰/۵)	۱/۵
۳	مصحح شو: $(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y})(x+y)\geq ۴\Leftrightarrow \underbrace{۱+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+۱\geq ۴}_{(۰/۲۵)}\Leftrightarrow\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geq ۲$ $\underbrace{\frac{y^۲+x^۲}{xy}\geq ۲}_{(۰/۲۵)}\xleftrightarrow[x,y>۰]{\times xy}\underbrace{x^۲+y^۲-۲xy\geq ۰}_{(۰/۲۵)}\Leftrightarrow(x-y)^۲\geq ۰\ (۰/۲۵)\Rightarrow$ همواره برقرار است اثبات به روش بازگشتی: در این روش، از حکم مسئله شروع می‌کنیم و با فرض درستی حکم، به یک رابطه بدیهی یا فرض مسئله می‌رسیم. در استفاده از این روش، برای ساده کردن حکم مسئله از گزاره‌های دوشرطی استفاده می‌کنیم. **توجه:** گزاره دو شرطی $A\Leftrightarrow B$، زمانی درست است که گزاره‌های A و B هم‌ارزش باشند. **مثال:** به روش بازگشتی، ثابت کنید اگر $a>۰$، آن‌گاه $a+\frac{۱}{a}\geq ۲$ است. $a+\frac{۱}{a}\geq ۲\Leftrightarrow a^۲+۱\geq ۲a\Leftrightarrow a^۲-۲a+۱\geq ۰\Leftrightarrow(a-۱)^۲\geq ۰\rightarrow$ همواره برقرار است. **مثال:** به روش بازگشتی، ثابت کنید حاصل‌ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربعات آن‌ها است. $xy\leq\frac{x^۲+y^۲}{۲}\Leftrightarrow ۲xy\leq x^۲+y^۲\Leftrightarrow x^۲+y^۲-۲xy\geq ۰\Leftrightarrow(x-y)^۲\geq ۰\rightarrow$ همواره درست **مثال:** برای هر سه عدد حقیقی x و y و z ثابت کنید: $x^۲+y^۲+z^۲\geq xy+yz+xz$ $x^۲+y^۲+z^۲\geq xy+yz+xz\Leftrightarrow ۲x^۲+۲y^۲+۲z^۲\geq ۲xy+۲yz+۲xz$ $\Leftrightarrow(x^۲+y^۲-۲xy)+(y^۲+z^۲-۲yz)+(x^۲+z^۲-۲xz)\geq ۰$ $\Leftrightarrow(x-y)^۲+(y-z)^۲+(x-z)^۲\geq ۰\rightarrow$ همواره درست	۱

مثال: ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آن‌ها کم‌تر نیست.

اگر دو عدد a و b نامنفی باشند، حکم مسئله برابر است با: $\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$

$$\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq ۲\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-۲\sqrt{ab} \geq ۰ \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^۲ \geq ۰$$

گزاره فوق همیشه درست است.

۴ — ۱/۵

مصحح شو:

فرض می‌کنیم که $(۷m+۶, ۶m+۵) = d$ باشد، لذا داریم:

$$\begin{cases} d \mid ۷m+۶ \ (۰/۲۵) \\ d \mid ۶m+۵ \ (۰/۲۵) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid ۴۲m+۳۶ \ (۰/۲۵) \\ d \mid ۴۲m+۳۵ \ (۰/۲۵) \end{cases}$$

$$\Rightarrow d \mid (۴۲m+۳۶)-(۴۲m+۳۵) \Rightarrow d \mid ۱ \ (۰/۲۵)$$

در نتیجه $d=۱$ است. (۰/۲۵)

بخش‌پذیری:

عدد صحیح b را بر عدد صحیح و مخالف صفر a بخش‌پذیر گوییم هرگاه عدد صحیحی مانند q وجود داشته باشد به طوری که: $b = aq$

$a \mid b$ یعنی
- عدد a، شمارنده عدد b است.
- عدد a، عدد b را می‌شمارد.
- b بر a بخش‌پذیر است.
- b مضرب a است.
- a، مقسوم‌علیه b است.

ویژگی‌های رابطه عاد کردن:

$$\bullet\, a \mid b \Rightarrow \begin{cases} a \mid -b \\ -a \mid b \\ -a \mid -b \end{cases}$$

$\bullet\, a \mid b \Rightarrow a \mid mb$ $\qquad$ $\bullet\, a \mid b \Rightarrow a \mid b^n ; (n \in \mathbb{N})$ $\qquad$ $\bullet\, a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c$

$\bullet\, a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid b \pm c \xrightarrow{\text{تعمیم}} a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid mb \pm nc$

$\bullet\, a \mid b \xrightarrow{b \neq ۰} |a| \leq |b| \xrightarrow{\text{نتیجه}} a \mid b \wedge b \mid a \Rightarrow a = \pm b$

$\bullet\, a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n$ $\qquad$ $\bullet\, a \mid b \wedge c \mid d \Rightarrow ac \mid bd$ $\qquad$ $\bullet\, a \mid b \xrightarrow{n \leq m} a^n \mid b^m$

مثال: اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد به طوری که $۵ \mid ۴k+۱$، ثابت کنید: $۲۵ \mid ۱۶k^۲+۲۸k+۶$

$$۵ \mid ۴k+۱ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۲۵ \mid ۱۶k^۲+۸k+۱$$
$$۵ \mid ۴k+۱ \xrightarrow{\times ۵} ۲۵ \mid ۲۰k+۵$$
$$\xrightarrow{+} ۲۵ \mid ۱۶k^۲+۲۸k+۶$$

نکته:

ـ هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از یک که هیچ شمارنده مثبتی به جز یک و خودش نداشته باشد عدد اول نامیده می‌شود.

مجموعه اعداد اول: $p = \{۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ...\}$

ـ اگر p عددی اول و a عددی طبیعی بوده و $a \mid p$، داریم: $a=۱$ یا $a=p$

مثال: اگر $a|9k+7$ و $a|7k+6$ و $a\in\mathbb{N}$ باشد ثابت کنید $a=1$ یا $a=5$.

$$\left.\begin{array}{l} a|9k+7 \xrightarrow[\times 7]{\text{طرف راست}} a|63k+49 \\ a|7k+6 \xrightarrow[\times 9]{\text{طرف راست}} a|63k+54 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{سمت راست}]{-} a|5 \to \begin{cases} a=1 \\ \text{یا} \\ a=5 \end{cases}$$

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب.م.م):

۱) عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند) و می‌نویسیم $(a,b)=d$، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

- $d|a, d|b$
- $\forall m>0; m|a, m|b \Rightarrow m\le d$

۲) اگر $a|b$، داریم: $(a,b)=|a|$

۳) اگر p عددی اول باشد و $a\in\mathbb{Z}$ و $p\nmid a$، داریم $(p,a)=1$

۴) اگر p و q هر دو اول باشند و $p\neq q$ باشد، داریم: $(p,q)=1$

۵) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول هستند، ببینید:

$$(m,m+1)=d \Rightarrow \begin{cases} d|m \\ d|m+1 \end{cases} \xrightarrow[\text{سمت راست}]{-} d|1 \Rightarrow d=1$$

۶) دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول هستند، ببینید:

$$(2n-1,2n+1)=d \Rightarrow \begin{cases} d|2n-1 \\ d|2n+1 \end{cases} \xrightarrow[\text{سمت راست}]{-} d|2 \Rightarrow d=1 \text{ یا } d=2$$

از طرفی، چون $2n+1$ (یا $2n-1$) عددی فرد است و یک عدد زوج نمی‌تواند یک عدد فرد را بشمارد $2\nmid 2n+1$، بنابراین $d=2$ غیرقابل قبول است.

مثال: m عددی صحیح است، حاصل $(2m,6m^3)$ را بیابید.

$$2m|6m^3 \Rightarrow (2m,6m^3)=|2m|$$

مثال: اگر a عددی طبیعی باشد، حاصل $(5a+4,2a+3)$ را به‌دست آورید.

$$(5a+4,2a+3)=d$$

$$\left.\begin{array}{l} d|5a+4 \xrightarrow[\text{سمت راست}]{\times 2} d|10a+8 \\ d|2a+3 \xrightarrow[\text{سمت راست}]{\times 5} d|10a+15 \end{array}\right. \xrightarrow[\text{سمت راست}]{(-)} d|7 \Rightarrow d=1 \text{ یا } d=7$$

کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م):

۱) عدد طبیعی c را ک.م.م دو عدد صحیح و ناصفر a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $[a,b]=c$، هر گاه دو شرط زیر برقرار باشند:

- $a|c, b|c$
- $\forall m>0; a|m, b|m \Rightarrow c\le m$

۲) اگر $a|b$ داریم: $[a,b]=|b|$

مثال: حاصل موارد زیر را به‌دست آورید. $(m\in\mathbb{Z})$

- $([m^2,m],m^5)$

چون $m|m^2$، داریم:

$$[m^2,m]=|m^2|=m^2$$

حال باید حاصل (m^2,m^5) را به‌دست بیاوریم. می‌دانیم که $m^2|m^5$، پس:

$$(m^2,m^5)=|m^2|=m^2$$

- $[m^7,(m^2,m^3)]$

چون $m^2 \,|\, m^3$ ، در نتیجه:

$$(m^2, m^3) = |m^2| = m^2$$

حال باید حاصل $[m^7, m^2]$ را بیابیم. می‌دانیم که $m^2 \,|\, m^7$ ، پس:

$$[m^7, m^2] = |m^7|$$

---

۵ — بارم: ۱/۵

مصحح شو:

می‌دانیم که باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۴، برابر ۳ است، پس: $a = 4q + 3 \quad (0/25)$

از طرفی، دنبال باقی‌مانده تقسیم عدد $2a + 3$ بر ۸ می‌گردیم، به عبارتی:

$$a = 4q + 3 \xrightarrow{\times 2} 2a = 8q + 6 \xrightarrow{+3} 2a + 3 = 8q + 9 \quad (0/5)$$

$$2a + 3 = 8q + 8 + 1 \Rightarrow 2a + 3 = 8(q+1) + 1 \Rightarrow 2a + 3 = 8q' + 1 \quad (0/5)$$

در نتیجه باقی‌مانده تقسیم عدد $2a + 3$ بر ۸ برابر ۱ است. (۰/۲۵)

قضیهٔ تقسیم:

اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت، اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند q و r یافت می‌شوند به طوری که:

$$a = bq + r \; ; \; 0 \le r < b$$

مثال: اگر در تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌مانده تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

$$a = bq + r ; 0 \le r < b \Rightarrow a - bq = r$$

می‌دانیم که a ، مقسوم و b مقسوم‌علیه است، لذا طبق اطلاعات سوال:

$$\begin{cases} n|a \\ n|b \xrightarrow[\text{سمت راست}]{\times q} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n|a \\ n|bq \end{cases} \xrightarrow{(-1)} n \,|\, \underbrace{a - bq}_{r} \Rightarrow n|r$$

مثال: اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت، باقی‌مانده تقسیم عدد $(2m - 5n)$ بر ۱۷ را محاسبه کنید.

$$m = 17q + 5 \xrightarrow{\times 2} 2m = 17(2q) + 10$$

$$n = 17q' + 3 \xrightarrow{\times 5} 5n = 17(5q') + 15$$

$$2m - 5n = 17(\underbrace{2q - 5q'}_{k}) - 5 \Rightarrow 2m - 5n = 17k - 5 + 17 - 17$$

$$\Rightarrow 2m - 5n = 17k - 17 + 12 \Rightarrow 2m - 5n = 17(\underbrace{k - 1}_{k'}) + 12 = 17k' + 12 \Rightarrow r = 12$$

---

۶ — بارم: ۱/۵

مصحح شو:

$$2x + 5y = 29 \quad (*)$$

شرط وجود جواب $(2,5) | 29 \Rightarrow 1 | 29 \quad (0/25)$

$$\underbrace{2x \overset{5}{\equiv} 29 \overset{5}{\equiv} 4 \Rightarrow x \overset{5}{\equiv} 2}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{x = 5k + 2 \; ; \; k \in \mathbb{Z}}_{(0/5)}$$

$$2(5k + 2) + 5y = 29 \Rightarrow 10k + 4 + 5y = 29 \Rightarrow \underbrace{y = -2k + 5 \; ; \; k \in \mathbb{Z}}_{(0/5)}$$

بررسی هم نهشتی:

برای هر عدد طبیعی مانند m و هر دو عدد صحیح مانند a و b، اگر $m \,|\, a - b$ ، می‌گوییم « a به پیمانهٔ m با b هم‌نهشت است» و می‌نویسیم $a \overset{m}{\equiv} b$ که این تعریف به زبان ریاضی عبارت است از:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \; , \; a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow m \,|\, a - b \; , \; (m \in \mathbb{N})$$

توجه: مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیحی که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر عدد طبیعی m برابر با r می‌باشد را کلاس یا دسته هم‌نهشتی r به پیمانهٔ m می‌گوییم و با نماد $[r]_m$ نمایش می‌دهیم.

$$[r]_m = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = mk + r\}$$

ویژگی‌های رابطه هم‌نهشتی:

- $a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm c$
- $a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$
- $a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n \ ; (n \in \mathbb{N})$
- $\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ c \overset{m}{\equiv} d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ac \overset{m}{\equiv} bd \\ a+c \overset{m}{\equiv} b+d \\ a-c \overset{m}{\equiv} b-d \end{cases}$
- $a \overset{m}{\equiv} b \ , \ b \overset{m}{\equiv} c \rightarrow a \overset{m}{\equiv} c$
- $a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow a \pm mt \overset{m}{\equiv} b \pm mk$
- $ac \overset{m}{\equiv} bc \xrightarrow{(c,m)=d} a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b \xrightarrow{\text{نتیجه}} ac \overset{m}{\equiv} bc \xrightarrow{(c,m)=۱} a \overset{m}{\equiv} b$
- $a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{n|m} a \overset{n}{\equiv} b$
- $a \overset{m}{\equiv} b \ , \ b \overset{n}{\equiv} c \xrightarrow{(m,n)=d} a \overset{d}{\equiv} c$

توجه: اگر باقی‌مانده تقسیم a بر m برابر r باشد در این صورت داریم، $a \overset{m}{\equiv} r$ به عبارت دیگر:

$$a = mq + r \Leftrightarrow a \overset{m}{\equiv} r$$

توجه: هرگاه دو عدد a و b در تقسیم بر عدد طبیعی m ، هم‌باقی‌مانده باشند، داریم: $a \overset{m}{\equiv} b$

مثال: باقی‌مانده تقسیم عدد $k = (۲۷)^۷ + ۱۹$ را بر ۱۳ بیابید:

$$۲۷ = (۱۳ \times ۲) + ۱ \rightarrow ۲۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \xrightarrow[\text{به توان ۷}]{\text{طرفین}} (۲۷)^۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱^۷ = ۱ \qquad (A)$$

$$۱۹ = (۱۳ \times ۱) + ۶ \rightarrow ۱۹ \overset{۱۳}{\equiv} ۶ \qquad (B)$$

طرفین روابط A و B را جمع می‌کنیم:

$$\underbrace{(۲۷)^۷ + ۱۹}_{k} \overset{۱۳}{\equiv} ۶ + ۱ \rightarrow k \overset{۱۳}{\equiv} ۷ \rightarrow r = ۷$$

مثال: باقی‌مانده تقسیم عدد $A = (۱۰۰۰)^{۲۵} \times ۹ + ۱۱$ را بر ۷ بیابید:

$$۱۰۰۰ = (۱۴۲ \times ۷) + ۶ \rightarrow ۱۰۰۰ \overset{۷}{\equiv} ۶ \overset{۷}{\equiv} -۱ \rightarrow ۱۰۰۰ \overset{۷}{\equiv} -۱ \xrightarrow[\text{به توان ۲۵}]{\text{طرفین}} (۱۰۰۰)^{۲۵} \overset{۷}{\equiv} (-۱)^{۲۵} = -۱$$

$$\xrightarrow[\times ۹]{\text{طرفین}} (۱۰۰۰)^{۲۵} \times ۹ \overset{۷}{\equiv} -۹ \xrightarrow[+۱۱]{\text{طرفین}} (۱۰۰۰)^{۲۵} \times ۹ + ۱۱ \overset{۷}{\equiv} ۲ \rightarrow r = ۲$$

نکته: عدد $A = \overline{a_n a_{n-۱} a_{n-۲} a_{n-۳} \cdots a_۲ a_۱ a_۰}$ را در نظر بگیرید:

۱) این عدد را می‌توان به صورت زیر بسط داد:

$$A = a_۰ + ۱۰ a_۱ + ۱۰^۲ a_۲ + \cdots + ۱۰^n a_n$$

۲) باقی‌مانده تقسیم این عدد بر ۳ یا ۹ با باقی‌مانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۳ یا ۹ برابر است.

$$A\overset{۹}{\equiv}a_n+a_{n-۱}+\cdots+a_۲+a_۱+a_۰\overset{۹}{\equiv}\cdots$$

۳) برای به دست آوردن باقی‌مانده تقسیم این عدد بر ۱۱، از سمت راست عدد، ارقام را به صورت یک در میان با هم جمع و تفریق می‌کنیم و باقی‌مانده عدد به دست آمده را بر ۱۱ به دست می‌آوریم.

$$A\overset{۱۱}{\equiv}a_۰-a_۱+a_۲-a_۳+\cdots+(-۱)^n a_n\overset{۱۱}{\equiv}\cdots$$

۴) باقی‌مانده تقسیم این عدد بر ۱۰ یا ۲ یا ۵ با باقی‌مانده تقسیم رقم سمت راست آن عدد بر ۱۰ یا ۲ یا ۵، برابر است.

$$A\overset{۱۰}{\equiv}a_۰\overset{۱۰}{\equiv}\cdots$$

$$A\overset{۲}{\equiv}a_۰\overset{۲}{\equiv}\cdots$$

$$A\overset{۵}{\equiv}a_۰\overset{۵}{\equiv}\cdots$$

مثال: باقی‌مانده تقسیم عدد $A=۱۳۷۰۰۴۰۵$ را بر عدد ۹ بیابید:

$$۱۳۷۰۰۴۰۵\overset{۹}{\equiv}۱+۳+۷+۰+۰+۴+۰+۵\overset{۹}{\equiv}۲۰\overset{۹}{\equiv}۲\to r=۲$$

باقی‌مانده تقسیم عدد فوق بر ۱۱ را بیابید:

$$۱۳۷۰۰۴۰۵\overset{۱۱}{\equiv}۵-۰+۴-۰+۰-۷+۳-۱\overset{۱۱}{\equiv}۴\to r=۴$$

باقی‌مانده تقسیم عدد فوق بر ۲ را بیابید:

$$۱۳۷۰۰۴۰۵\overset{۲}{\equiv}\underbrace{۱۳۷۰۰۴۰۰}_{\text{بزار کنار}}+۵\overset{۲}{\equiv}۱\to r=۱$$

مثال: باقی‌مانده تقسیم عدد $۱!+۲!+۳!+\cdots+۵۰۰!$ را بر ۱۰ به دست آورید.

$$۱!\overset{۱۰}{\equiv}۱\ ,\ ۲!\overset{۱۰}{\equiv}۲\ ,\ ۳!=۶\overset{۱۰}{\equiv}۶$$

$$۴!=۲۴\overset{۱۰}{\equiv}۴$$

$$۵!=۱۲۰\overset{۱۰}{\equiv}۰$$

$$۶!=۷۲۰\overset{۱۰}{\equiv}۰$$

$$\vdots$$

$$۵۰۰!\overset{۱۰}{\equiv}۰$$

همان‌طور که می‌بینید از $۵!$ به بعد رقم یکان اعداد برابر صفر می‌شود بنابراین:

$$۱!+۲!+۳!+\cdots+۵۰۰!\overset{۱۰}{\equiv}۱+۲+۶+۴+\cdots+۰\overset{۱۰}{\equiv}۱۳\overset{۱۰}{\equiv}۳\to r=۳$$

توجه: اگر در سؤالی درباره رقم یکان یک عدد پرسیدند کافی است که باقی‌مانده تقسیم آن عدد بر ۱۰ را به دست بیاوریم.

مثال: رقم یکان عدد $(۲^{۱۱}+۷)$ را به دست آورید.

$$۲^{۱۰}=۱۰۲۴\to ۲^{۱۰}\overset{۱۰}{\equiv}۴\xrightarrow[\times ۲]{\text{طرفین}}۲^{۱۱}\overset{۱۰}{\equiv}۸\xrightarrow[+۷]{\text{طرفین}}۲^{۱۱}+۷\overset{۱۰}{\equiv}۱۵\overset{۱۰}{\equiv}۵$$

معادله سیاله:

به معادله $ax+by=c\ ;\ (a,b,c\in\mathbb{Z})$ معادله سیاله درجه اول (خطی) می‌گوییم هرگاه جواب‌های این معادله (یعنی x و y) در اعداد صحیح باشند.

توجه: شرط لازم و کافی برای اینکه معادله سیاله $ax+by=c$ جواب داشته باشد این است که: $(a,b)|c$

مثال: آیا معادله سیاله $۴x+۶y=۹$ جواب صحیح دارد؟ دلیل بیاورید.

خیر، زیرا $(۴,۶)=۲$, $۲\nmid ۹$

حل معادله سیاله با تبدیل آن به معادله هم‌نهشتی:

ـ ابتدا معادله سیاله را به یکی از دو صورت زیر تبدیل به معادله هم‌نهشتی می‌کنیم.
$$ax+by=c \Rightarrow \begin{cases} ax \overset{|b|}{\equiv} c \\ by \overset{|a|}{\equiv} c \end{cases}$$

ـ سپس معادله هم‌نهشتی موردنظر را حل کرده و جواب به دست آمده را در معادله سیاله قرار داده و با حل آن جواب دیگر را به دست می‌آوریم.

مثال: معادله سیاله $۵x+۲y=۱۸$ را حل کنید و جواب‌های عمومی آن را بیابید.

$$۵x+۲y=۱۸ \Rightarrow ۲y \overset{۵}{\equiv} ۱۸ \xrightarrow{(۲,۵)=۱} y \overset{۵}{\equiv} ۹ \overset{۵}{\equiv} ۴ \to y=۵k+۴$$

حال $y=۵k+۴$ را در معادله سیاله به جای y قرار می‌دهیم:

$$۵x+۲(۵k+۴)=۱۸ \Rightarrow ۵x+۱۰k+۸=۱۸ \Rightarrow ۵x=-۱۰k+۱۰$$
$$\Rightarrow ۵x=۵(-۲k+۲) \Rightarrow x=-۲k+۲$$

مثال: به چند طریق می‌توان یک کیسه ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

$$\begin{cases} x = \text{تعداد وزنه‌های ۳ کیلویی} \\ y = \text{تعداد وزنه‌های ۵ کیلویی} \end{cases}$$

فقط دقت کنید که چون x و y تعداد وزنه‌ها را نشان می‌دهند بنابراین x و y اعدادی صحیح و نامنفی هستند. $(x,y \in \mathbb{W})$

لذا باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله سیاله $۳x+۵y=۲۳$ را پیدا کنیم.

$$۳x+۵y=۲۳ \Rightarrow ۳x \overset{۵}{\equiv} ۲۳ \Rightarrow ۳x \overset{۵}{\equiv} (۵\times۴)+۳ \Rightarrow ۳x \overset{۵}{\equiv} ۳ \xrightarrow{(۳,۵)=۱} x \overset{۵}{\equiv} ۱ \Rightarrow x=۵k+۱$$

حال $x=۵k+۱$ را در معادله سیاله قرار می‌دهیم:

$$۳(۵k+۱)+۵y=۲۳ \Rightarrow ۱۵k+۳+۵y=۲۳ \Rightarrow ۵y=-۱۵k+۲۰ \Rightarrow y=-۳k+۴$$

می‌دانیم که y و x باید صحیح و نامنفی باشند، پس:

$$\begin{cases} x \ge ۰ \Rightarrow ۵k+۱ \ge ۰ \Rightarrow k \ge -\frac{۱}{۵} \\ y \ge ۰ \Rightarrow -۳k+۴ \ge ۰ \Rightarrow k \le \frac{۴}{۳} \end{cases} \xrightarrow[(k\in\mathbb{Z})]{\text{اشتراک}} \begin{cases} k=۰ \\ k=۱ \end{cases}$$

بنابراین دو روش برای انجام این کار وجود دارد.

$$k=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ y=۴ \end{cases} \Rightarrow (\text{یک وزنه ۳ کیلویی و ۴ وزنه ۵ کیلویی})$$

$$k=۱ \Rightarrow \begin{cases} x=۶ \\ y=۱ \end{cases} \Rightarrow (\text{۶ وزنه ۳ کیلویی و یک وزنه ۵ کیلویی})$$

۷

مصحح شو:

تعداد یال‌های گراف ۶ منتظم $= \frac{۶p}{۲} = ۳p \quad (۰/۲۵)$

تعداد یال‌های گراف کامل : $\frac{p(p-۱)}{۲} = ۳p+۳۰ \quad (۰/۲۵) \quad \Rightarrow p^۲-p=۶p+۶۰ \Rightarrow p^۲-۷p-۶۰=۰ \Rightarrow \begin{cases} p=۱۲ \ (۰/۲۵) & \text{مرتبه این گراف} \\ p=-۵ \times \end{cases}$

۰/۷۵

هر آنچه باید در مورد گراف بدانید!!!

نکته ۱:

- به گرافی که برای یال‌های آن تعیین جهت شده باشد **گراف جهت‌دار** می‌گوییم.
- تعداد رأس‌های گراف G را **مرتبه گراف** G می‌گوییم و آن را با $P(G)$ یا $|V(G)|$ نشان می‌دهیم.
- تعداد یال‌های گراف G را **اندازه گراف** G می‌گوییم و آن را با $q(G)$ یا $|E(G)|$ نشان می‌دهیم.
- به تعداد یال‌هایی که به رأس v در گراف G متصل هستند **درجهٔ رأس** v گوییم و آن را با $\deg(v)$ یا $d(v)$ نشان می‌دهیم.
- اگر درجه یک رأس فرد باشد آن را **رأس فرد** و اگر درجه یک رأس زوج باشد آن را **رأس زوج** می‌گوییم.
- به رأسی که درجه آن صفر باشد (هیچ یالی به آن متصل نباشد)، **رأس تنها** (یا رأس ایزوله) می‌گوییم.
- گرافی را که تمام رئوس آن رأس تنها باشند (هیچ یالی نداشته باشد) **گراف تهی** می‌گوییم.
- گرافی که درجه تمام رأس‌های آن با هم مساوی و برابر عدد K باشد، **گراف** $K-$**منتظم** می‌گوییم.

توجه: گراف فرد ـ منتظم از مرتبه فرد وجود ندارد.

• به یالی که یک رأس را به خود آن رأس وصل کند **طوقه** گفته می‌شود.

گراف ساده گرافی است که
- طوقه ندارد.
- یال جهت‌دار ندارد.
- بین هر دو رأس آن **حداکثر** یک یال وجود داشته باشد.

• دو رأس u و v را **دو رأس همسایه یا مجاور** می‌گوییم که توسط یالی به هم وصل شده باشند.

• به مجموعه رأس‌هایی از گراف G که به رأس v متصل هستند، **همسایگی باز رأس** v می‌گوییم و آن را با $N_G(v)$ نشان می‌دهیم. حال اگر خود رأس v را نیز به این مجموعه اضافه کنیم مجموعه‌ای به دست می‌آید که به آن **همسایگی بسته رأس** v گفته و آن را با $N_G[v]$ نشان می‌دهیم.

• دو یال را **مجاور** گوییم هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دوی آن‌ها به آن متصل باشند.

• بزرگ‌ترین عدد در بین درجات رئوس گراف G را **ماکزیمم درجه گراف** می‌نامیم و آن را با $\Delta(G)$ نشان می‌دهیم.

• کوچک‌ترین عدد در بین درجات رئوس گراف G را **مینیمم درجه گراف** می‌نامیم و آن را با $\delta(G)$ نشان می‌دهیم.

• یک **زیرگراف** از گراف G گرافی است که مجموعه رئوس آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه رئوس گراف G و مجموعه یال‌های آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه یال‌های گراف G باشد.

مکمل گراف G
- آن را با G^c یا $\overline{G}$ نشان می‌دهیم.
- مجموعه رئوس مکمل گراف G همان مجموعه رئوس گراف G است.
- اگر بین دو رأس دلخواه از گراف G یالی وجود نداشته باشد در این صورت بین همان دو رأس در گراف مکمل، یک یال وجود دارد (و بالعکس).
- اگر G یک گراف از مرتبه p و v یک رأس از آن باشد داریم: $d_G(v)+d_{\overline{G}}(v)=p-۱$
- اگر G یک گراف از مرتبه p و اندازه q باشد، داریم: $q(G)+q(\overline{G})=\frac{p(p-۱)}{۲}$

گراف کامل
- به گرافی که هر رأس آن با تمام رئوس دیگر مجاور باشد، گراف کامل می‌گوییم.
- گراف کامل p رأسی را با k_p نمایش می‌دهیم و می‌توان گفت که k_p یک گراف p رأسی و $(p-۱)-$ منتظم است.
- تعداد یال‌های یک گراف کامل p رأسی برابر است با: $q(k_p)=\frac{p(p-۱)}{۲}$
- مکمل یک گراف کامل، یک گراف تهی است و بالعکس.

مسیر
- اگر u و v دو رأس از گراف G باشند یک مسیر از u به v، در G دنباله‌ای از رئوس دو به دو متمایز در G است که از u شروع و به v ختم می‌شود به‌طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاور هم باشند.
- طول یک مسیر = تعداد یال‌های موجود در آن مسیر = یکی کمتر از تعداد رأس‌های موجود در آن مسیر
- دنباله متشکل از تنها یک رأسِ v، یک مسیر با طول صفر از رأس v به خودش است.
- گرافی را که تنها از یک مسیر n رأسی تشکیل شده باشد با P_n نمایش می‌دهیم. ببین:

$P_۴$

دور

- دنباله $v_۱v_۲v_۳\cdots v_nv_۱\ ;\ (n\geq ۳)$، از رئوس دوبه‌دو متمایز که در آن هر رأس با رأس بعدی مجاور است را یک دور به طول n می‌نامیم.
- گرافی که تنها از یک دور n رأسی تشکیل شده باشد را با C_n نمایش می‌دهیم. ببین:

• گراف G را همبند می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد در غیر این صورت آن را ناهمبند می‌نامیم.

نکته ۲: اگر G یک گراف با مرتبه p و اندازه q و $V=\{v_۱,v_۲,\dots,v_p\}$ مجموعه رئوس آن باشند، آن‌گاه:

$$\sum_{i=۱}^{p}\deg v_i=۲q$$

نکته ۳: تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.

نکته ۴: اگر G یک گراف ساده با مرتبه p و اندازه q باشد، آن‌گاه:

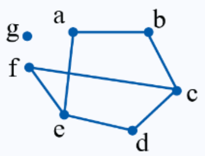
$$۰\leq q\leq\frac{p(p-۱)}{۲}$$

نکته ۵: در یک گراف $k-$منتظم از مرتبه p و اندازه q، داریم:

$$pk=۲q$$

مثال: گراف G با مجموعه رأس‌های $V=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ و مجموعه یال‌های $E=\{ab,bc,cd,ed,ae,cf,ef\}$ را در نظر بگیرید:

الف) نمودار گراف را رسم کنید:



ب) مرتبه و اندازه گراف G را مشخص کنید:

$$\begin{cases}p(G)=۷\\ q(G)=۷\end{cases}$$

پ) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟

$$\sum_{i=۱}^{۶}\deg v_i=۲q=۲(۷)=۱۴$$

ت) کدام رأس‌های گراف G با رأس f مجاورند؟ e و c

ث) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید.

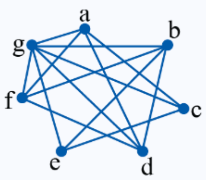
$$\begin{cases}\Delta(G)=۳\\ \delta(G)=۰\end{cases}$$

ج) یک مسیر به طول ۵ از b به d بنویسید. $baefcd$

چ) یک دور به طول ۴ مشخص کنید. $fcdef$

ح) مکمل گراف G را رسم کنید.

• بزرگ‌ترین درجه مربوط به رأس g و برابر ۶ است.



خ) $N_G[b]$ را مشخص کنید. $N_G[b]=\{a,b,c\}$

د) آیا گراف G همبند است؟ خیر ـ چرا؟ چون مثلاً از g به a مسیری وجود ندارد.

ذ) با ذکر دلیل مشخص کنید که گراف مکمل چند یال دارد؟

$$q(G)+q(\overline{G})=\frac{p(p-۱)}{۲}\xrightarrow{q(G)=۷}۷+q(\overline{G})=\frac{۷(۶)}{۲}\to q(\overline{G})=۲۱-۷=۱۴$$

مثال: یک گراف کامل ۸ رأسی چند یال دارد؟

$$q(k_{۸}) = \frac{p(p-۱)}{۲} = \frac{۸(۷)}{۲} = ۲۸$$

مثال: در گراف G، درجه رأس v برابر ۹ است و درجه رأس v در گراف $\overline{G}$ برابر با ۱۲ است. مرتبه گراف G را مشخص کنید.

$$\begin{cases} \deg_G(v) = ۹ \\ \deg_{\overline{G}}(v) = ۱۲ \end{cases}$$

$$\deg_G(v) + \deg_{\overline{G}}(v) = p-۱ \rightarrow ۹+۱۲ = p-۱ \rightarrow p = ۲۲$$

مثال: گراف کامل k_p دارای ۱۰ یال است. تعداد رأس‌های این گراف را به دست آورید.

$$q(k_p) = \frac{p(p-۱)}{۲} \xrightarrow{q=۱۰} ۱۰ = \frac{p(p-۱)}{۲} \rightarrow p(p-۱) = ۲۰ \xrightarrow{p>۰} p = ۵$$

مثال: گراف G، ۳ـ منتظم است و اندازه آن ۳ واحد کمتر از ۲ برابر تعداد رأس‌های گراف است. مرتبه گراف را به دست آورید.

$$q = ۲p-۳$$

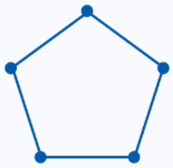
از طرفی: $pk = ۲q \xrightarrow{k=۳} ۳p = ۲q \rightarrow q = \frac{۳}{۲}p$

$$\rightarrow \frac{۳}{۲}p = ۲p-۳ \rightarrow \frac{p}{۲} = ۳ \rightarrow p = ۶$$

مثال: یک گراف ۵ رأسیِ غیرتهیِ kـ منتظم رسم کنید به طوری که:

الف) k بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

ب) k کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.



توجه کنید که گراف فرد ـ منتظم از مرتبه فرد وجود ندارد.

---

۸ — ۰/۷۵

مصحح شو:

الف) $\Delta(G) = ۳ , \delta(G) = ۰$ (۰/۲۵)

ب) $bcde$ یا $bdec$ یا $bced$ یا $bdce$ (هر کدام نوشته شد ۰/۲۵)

ج) $N_G(f) = \{g\}$ (۰/۲۵)

---

۹ — ۱/۵

مصحح شو:

الف) $\{e,h,f,g\}$ (۰/۵)

ب) $\{a,c\}$ (۰/۲۵)

ج) $\underbrace{\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۸}{۴+۱} \right\rceil = ۲}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \gamma(G) \geq ۲$

از طرفی مجموعه $\{b,d\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای این گراف است، پس $\gamma(G) = ۲$ است. (۰/۲۵)

بررسی احاطه‌گری گراف‌ها:

نکته ۱: زیرمجموعه D از مجموعه رئوس گراف G را **مجموعه احاطه‌گر** می‌نامیم هرگاه هر رأس از گراف یا در D باشد و یا حداقل با یکی از رئوس D مجاور باشد.

نکته ۲: در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر یک گراف، مجموعه‌ای را که کمترین تعداد عضو را داشته باشد، **مجموعه احاطه‌گر مینیمم** آن گراف می‌نامیم و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را **عدد احاطه‌گری** گراف G می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

توجه: گاهی اوقات برای راحتی به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم از گراف G، یک $\gamma-$ مجموعه می‌گوییم.

نکته ۳: یک مجموعه احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد، **احاطه‌گر مینیمال** می‌نامیم.

نکته ۴: اگر G یک گراف n رأسی با ماکزیمم درجه Δ باشد در این صورت:

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil$$

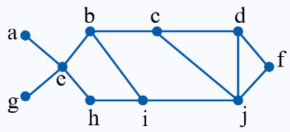
توجه: در گراف‌های C_n و P_n ، داریم:

$$\gamma(G) = \left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil$$

نکته ۵: هر مجموعه احاطه‌گر مینیمم یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال نیز هست ولی عکس آن لزوماً درست نیست.

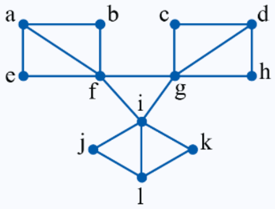
نکته ۶: در گراف کامل، عدد احاطه‌گری برابر ۱ است.

مثال: عدد احاطه‌گری گراف‌های زیر را به دست آورید.



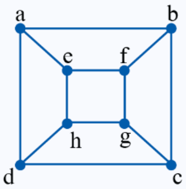
$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil \to \gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۱۰}{۴+۱} \right\rceil \to \gamma(G) \geq ۲$$

از طرفی مجموعه $D=\{e,j\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است بنابراین $\gamma(G) \leq ۲$ است لذا: $\gamma(G)=۲$



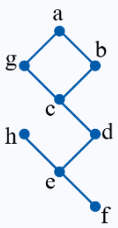
$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil \to \gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۱۲}{۵+۱} \right\rceil \to \gamma(G) \geq ۲$$

با دو رأس نمی‌توان گراف فوق را احاطه کرد از طرفی مجموعه $D=\{f,g,i\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای گراف است پس: $\gamma(G)=۳$



$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil \to \gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۸}{۳+۱} \right\rceil \to \gamma(G) \geq ۲$$

بنابراین حداقل عدد احاطه‌گری برابر ۲ است از طرفی مجموعه $D=\{e,c\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای گراف است پس $\gamma(G) \leq ۲$ است در نتیجه $\gamma(G)=۲$.



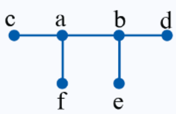
$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۸}{۳+۱} \right\rceil \to \gamma(G) \geq ۲$$

اما با دو رأس نمی‌توان تمام رأس‌های گراف را احاطه کرد از طرفی مجموعه $D=\{e,c,a\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است پس: $\gamma(G)=۳$

مثال: گرافی ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید به‌طوری که:

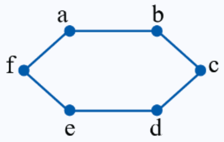
الف) مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.

گراف مقابل تنها یک مجموعه احاطه‌گر $\{a,b\}$ را دارد.



ب) بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد.

گراف مقابل سه مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۲ دارد که عبارتند از: $\{e,b\}$ ، $\{f,c\}$ و $\{a,d\}$



مثال: در گراف مقابل:

الف) یک مجموعه احاطه‌گر با ۴ عضو مشخص کنید:

مانند: $D=\{c,f,h,g\}$

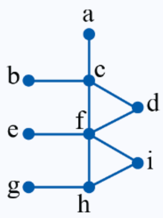
ب) یک $\gamma-$ مجموعه مشخص کنید:

مانند: $D=\{h,c,e\}$

پ) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۳ عضوی و یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۴ عضوی مشخص کنید:

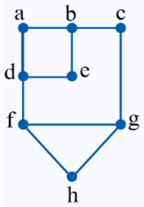
مانند: $D=\{c,f,g\}$

مانند: $D=\{g,c,i,e\}$



در این مثال اگر مجموعه‌های دیگری با ویژگی مشابه بنویسید به شما نمره تعلق می‌گیرد.

مثال: در گراف شکل زیر یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.



مانند: $D=\{a,e,c,h\}$

برای مجموعه‌های دیگر با ویژگی مشابه، نمره تعلق می‌گیرد.

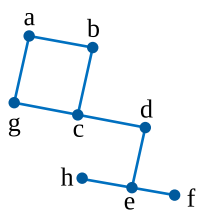
مثال: یک گراف ۶ رأسی که $\gamma-$ مجموعه آن با اندازه یک باشد، رسم کنید:

---

۱۰ — ۱/۵

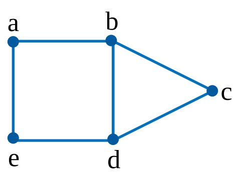
مصحح شو:

الف) در گراف زیر $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ برابر ۲ $=\left\lceil \frac{8}{4} \right\rceil$ است، اما برای احاطه این گراف، حداقل ۳ رأس لازم است (۰/۲۵).



(رسم گراف ۰/۵ نمره)

ب) در این گراف $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ برابر ۲ $=\left\lceil \frac{5}{4} \right\rceil$ است و با دو رأس $\{a,c\}$ گراف احاطه می‌شود. بنابراین عدد احاطه‌گری این گراف ۲ است(۰/۲۵).



(رسم گراف ۰/۵ نمره)

---

۱۱ — ۰/۵

مصحح شو:

$D=\{b,m,g,h,j,f\}$ (۰/۵)

ردیف	پاسخ	بارم
۱۲	مصحح شو: عدد احاطه‌گری گراف داده شده برابر ۲ است و هر γ− مجموعه (مجموعه احاطه‌گر مینیمم) آن باید یکی از دو رأس b و d و یکی از دو رأس e و g را شامل شود، در نتیجه، این گراف $۴=۲\times۲$ مجموعه احاطه‌گر مینیمم دارد. (۰/۷۵)	۰/۷۵
۱۳	مصحح شو: الف) $۶!\times۵!$ (۰/۵) ب) $۷!\times۵!$ (۰/۵)	۱
۱۴	مصحح شو: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=۱۷ \,;\, x_1>۲ \,,\, x_5=۲$ $x_1>۲\Rightarrow x_1\geq ۳\Rightarrow y_1=x_1-۳\geq ۰$ (۰/۲۵) $(x_1-۳)+x_2+x_3+x_4+۲+x_6=۱۷-۳$ (۰/۲۵) $y_1+x_2+x_3+x_4+x_6=۱۲$ (۰/۲۵) تعداد جواب‌های صحیح نامنفی : $\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{۱۲+۵-۱}{۵-۱}=\binom{۱۶}{۴}$ (۰/۵) یسری نکته‌های مهم رو باهم مرور کنیم... **نکته ۱:** تعداد جواب‌های **صحیح و نامنفی** معادله $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ برابر است با: $\binom{n+k-1}{k-1}$ **نکته ۲:** تعداد جواب‌های **صحیح و مثبت (تعداد جواب‌های طبیعی)** معادله $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ برابر است با: $\binom{n-1}{k-1}$ **مثال:** تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1+x_2+x_3+x_4=۹$ را بیابید. $\begin{cases}n=۹\\k=۴\end{cases}\Rightarrow$ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی $=\binom{۹+۴-۱}{۴-۱}=\binom{۱۲}{۳}=\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰}{۳\times۲\times۱}=۲۲۰$ **مثال:** تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله $x_1+x_2+x_3=۷$ را بیابید. $\begin{cases}n=۷\\k=۳\end{cases}\Rightarrow$ تعداد جواب‌های صحیح و مثبت $=\binom{n-1}{k-1}=\binom{۷-۱}{۳-۱}=\binom{۶}{۲}=\frac{۶\times۵}{۲\times۱}=۱۵$ **نکته:** اگر متغیرهای معادله دارای شرط بودند چکار کنیم؟ برای پیدا کردن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$، با شرط $x_1\geq a$ و $x_2\geq b$ و $x_3\geq c$ و ... و $x_k\geq m$، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم. ۱) ابتدا اعداد موجود در سمت راست هریک از شروط را به سمت چپ منتقل کرده و هر شرط را به‌صورت $x_i-\bigcirc\geq ۰$ تبدیل می‌کنیم. ۲) سپس عبارت $(x_i-\bigcirc)$ را با متغیر y_i برابر قرار داده و از آن‌جا x_i را تنها می‌کنیم. ۳) در نهایت x_i به‌دست آمده را در معادله اصلی جایگذاری کرده و معادله را حل می‌کنیم. **توجه:** اگر شرط مسئله به‌صورت $x_i>a$ باشد قبل از انجام مراحل بالا ابتدا باید شرط موردنظر را به حالت تساوی تبدیل کنیم ببینید: $x_i>a\longrightarrow x_i\geq(a+۱)$ **مثال:** معادله $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=۱۴$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن‌که $x_1\geq ۱$ و $x_3>۳$ باشند؟ $x_1\geq ۱\longrightarrow \underbrace{x_1-۱}_{y_1}\geq ۰\Rightarrow y_1=x_1-۱\Rightarrow x_1=y_1+۱\,;\,y_1\geq ۰$ $x_3>۳\xrightarrow{\text{تبدیل به تساوی}}x_3\geq ۴\longrightarrow \underbrace{x_3-۴}_{y_3}\geq ۰\Rightarrow y_3=x_3-۴\Rightarrow x_3=y_3+۴\Rightarrow\,;\,y_3\geq ۰$	۱/۲۵

حال x_1 و x_3 به‌دست آمده را در معادله اصلی جایگذاری می‌کنیم:

$$(y_1+1)+x_2+(y_3+4)+x_4+x_5=14 \Rightarrow y_1+x_2+y_3+x_4+x_5=9 \Rightarrow \begin{cases} n=9 \\ k=5 \end{cases}$$

$$\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی} = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{9+5-1}{5-1} = \binom{13}{4} = \frac{13\times12\times11\times10}{4\times3\times2\times1} = 715$$

مثال: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=10$ با شرط $2 \le i \le 5$ و $x_i > 0$ را محاسبه کنید.

شرط $2 \le i \le 5$ و $x_i > 0$، یعنی این‌که $x_2 > 0$ ، $x_3 > 0$ ، $x_4 > 0$ و $x_5 > 0$ است پس:

$$x_i > 0 \xrightarrow{\text{تبدیل به تساوی}} x_i \ge 1 \Rightarrow \underbrace{x_i - 1}_{y_i} \ge 0 \Rightarrow y_i = x_i - 1 \Rightarrow x_i = y_i + 1 \ , \ 2 \le i \le 5$$

$$x_1+(y_2+1)+(y_3+1)+(y_4+1)+(y_5+1)=10$$

$$x_1+y_2+y_3+y_4+y_5=6 \xrightarrow[k=5]{n=6} \text{جواب} = \binom{6+5-1}{5-1} = \binom{10}{4} = 210$$

نکته: اگر متغیرهای معادله دارای ضریب غیر از یک باشند، یا این‌که زیر رادیکال باشند، یا این‌که توان داشته باشند و ... باید با مقداردهی مناسب به آن‌ها، آن‌ها را از معادله حذف کنیم. سپس معادله موردنظر را در حالت‌های مختلف حل کرده و در نهایت جواب‌های به‌دست آمده را باهم جمع می‌کنیم.

توجه: مقداردهی به متغیرها باید به گونه‌ای باشد که
- خروجی متغیر عدد صحیحی باشد.
- طرف دوم معادله منفی نشود.

مثلاً اگر در معادله‌ای متغیر $\sqrt{x_i}$ وجود داشته باشد، مقادیر مناسب برای x_i عبارتند از: $\{0,1,4,9,\dots\}$

مثال: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1+3x_2+x_3+x_4=7$ را بیابید:

می‌دانیم که باید با مقداردهی مناسب به متغیر x_2 ، آن را از بازی حذف کنیم:

$$x_2=0 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=7 \xrightarrow[k=3]{n=7} \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$$

$$x_2=1 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=4 \xrightarrow[k=3]{n=4} \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$$

$$x_2=2 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=1 \xrightarrow[k=3]{n=1} \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{1+3-1}{3-1} = \binom{3}{2} = 3$$

اگه $x_2 = 3$ بدیم طرف دوم نامعادله منفی می‌شه پس تا همین‌جا کافیه!

$$\text{تعداد کل جواب‌ها} = 36+15+3 = 54$$

مثال: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1+\sqrt{x_2}+x_3+x_4=3$ را بیابید:

$$x_2=0 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=3 \xrightarrow[k=3]{n=3} \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$$

$$x_2=1 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=2 \xrightarrow[k=3]{n=2} \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$$

$$x_2=4 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=1 \xrightarrow[k=3]{n=1} \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{1+3-1}{3-1} = \binom{3}{2} = 3$$

$$x_2=9 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=0 \xrightarrow[k=3]{n=0} \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{0+3-1}{3-1} = \binom{2}{2} = 1$$

$$\text{تعداد کل جواب‌ها} = 10+6+3+1 = 20$$

۱۵ مصحح شو: ۱/۵

	M_1	M_2	M_3
R_1	۱	۲	۳
R_2	۲	۳	۱
R_3	۳	۱	۲

سه مکانیک (M) در سه روز (R) روی سه سمند کار می‌کنند. (۰/۵)

	M_1	M_2	M_3
R_1	۱	۲	۳
R_2	۳	۱	۲
R_3	۲	۳	۱

سه مکانیک در سه روز روی سه پژو کار می‌کنند. (۰/۵)

	M_1	M_2	M_3
R_1	۱۱	۲۲	۳۳
R_2	۲۳	۳۱	۱۲
R_3	۳۲	۱۳	۲۱

سه مکانیک در سه روز روی سه سمند و سه پژو به صورت مربع لاتین بالا کار می‌کنند. (۰/۵)

مربع لاتین:

یک جدول مربعی $n \times n$ را که سطرها و ستون‌های آن با اعداد ۱، ۲، ... و n پر شده باشند و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد، **مربع لاتین** می‌نامیم. (به هریک از اعداد درون مربع لاتین یک **درایه** می‌گوییم.)

- با تعویض جای دو سطر (یا دو ستون) از یک مربع لاتین، شکل حاصل باز هم یک مربع لاتین است.
- برای هر عدد طبیعی مانند n، مربع لاتین $n \times n$ وجود دارد.
- به تعداد ۲ عدد، مربع لاتین ۲×۲ وجود دارد.

۲	۱
۱	۲

۱	۲
۲	۱

توجه: به تعداد ۱۲ عدد، مربع لاتین ۳×۳ وجود دارد.

تذکر: مربع لاتین چرخشی به‌صورت زیر است.

$$\begin{array}{|cccccc|}
\hline
1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\
n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\
n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\
2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\
\hline
\end{array}$$

مثال ⟵ مربع لاتین ۴×۴

۱	۲	۳	٤
٤	۱	۲	۳
۳	٤	۱	۲
۲	۳	٤	۱

در مربع لاتین چرخشی
- درایه‌های قطر اصلی ← ۱
- ستون آخر (از پایین به بالا) به‌صورت ۱، ۲، ۳، ...، n هستند.
- سطر اول (از چپ به راست) به‌صورت ۱، ۲، ۳، ...، n هستند.

نکته: فرض کنید A و B دو مربع لاتین هم‌مرتبه باشند به‌طوری که از کنار هم قرار دادن درایه‌های نظیر از این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود که هر خانه آن حاوی یک عدد دورقمی است که تمام رقم‌های سمت چپ مربوط به مربع A و تمام رقم‌های سمت راست مربوط به مربع B (و یا برعکس) است. در این‌صورت گوییم دو مربع لاتین A و B **متعامدند** هرگاه هیچ‌یک از اعداد دورقمی موجود، در خانه‌های مربع جدید تکرار نشده باشد.

مثال: در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید.

الف)

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

۳	۲	۱
۱	۳	۲
۲	۱	۳

۳۲	۲۱	۱۳
۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۳۱

«متعامدند»

چرا که عدد دو رقمی تکراری نداریم.

ب)

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۱۳	۲۱	۳۲
۳۲	۱۳	۲۱
۲۱	۳۲	۱۳

«متعامد نیستند»

چرا که عدد دو رقمی تکراری وجود دارد.

مثال: مربع لاتین A را در نظر بگیرید. با اعمال جایگشت $۱ \to ۳$، $۲ \to ۲$، $۳ \to ۴$ و $۴ \to ۱$، مربع لاتین B را به‌دست آورده و متعامد بودن دو مربع لاتین A و B را بررسی کنید.

$A =$

۳	۴	۱	۲
۲	۱	۴	۳
۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱

$\xrightarrow[\text{جایگشت‌ها}]{\text{اعمال}}$

$B =$

۴	۱	۳	۲
۲	۳	۱	۴
۳	۲	۴	۱
۱	۴	۲	۳

۳۴	۴۱	۱۳	۲۲
۲۲	۱۳	۴۱	۳۴
۱۳	۲۲	۳۴	۴۱
۴۱	۳۴	۲۲	۱۳

پس دو مربع A و B متعامد نیستند چرا که عدد دورقمی تکراری در مربع بالا وجود دارد.

مثال: اگر سه برادر تقریباً هم‌سن و سال و هم‌سایز در خانه سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباس‌ها به گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد هریک از کت‌ها و هریک از پیراهن‌ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً در یک روز یک بار مورد استفاده قرار بگیرد، چگونه می‌توانند این کار را انجام دهند؟

	شنبه	یکشنبه	دوشنبه
A	۱	۲	۳
B	۳	۱	۲
C	۲	۳	۱

«پیراهن»

و

	شنبه	یکشنبه	دوشنبه
A	۲	۱	۳
B	۱	۳	۲
C	۳	۲	۱

«کت»

$\Longrightarrow$

	شنبه	یکشنبه	دوشنبه
A	۱۲	۲۱	۳۳
B	۳۱	۱۳	۲۲
C	۲۳	۳۲	۱۱

۱۶

مصحح شو:

حالت مطلوب، اعداد ۳ رقمی‌ای هستند که فاقد ۲ و فاقد ۹ نباشند، ارقامی که می‌توانیم استفاده کنیم از صفر تا ۹ هستند، یعنی ۱۰ تا.

$A:$ اعداد سه رقمی فاقد ۲ $\Rightarrow |A| = ۸\times۹\times۹ = ۶۴۸ \quad (۰/۲۵)$

$B:$ اعداد سه رقمی فاقد ۹ $\Rightarrow |B| = ۸\times۹\times۹ = ۶۴۸ \quad (۰/۲۵)$

$A\cap B:$ اعداد سه رقمی فاقد ۲ و ۹ $\Rightarrow |A\cap B| = ۷\times۸\times۸ = ۴۴۸ \quad (۰/۲۵)$

حالا چون کل سه رقمی‌ها ۹۰۰ تا هستند: $(۹\times۱۰\times۱۰)$ پس طبق اصل شمول و عدم شمول خواهیم داشت:

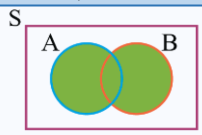
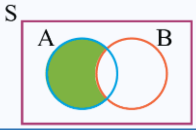
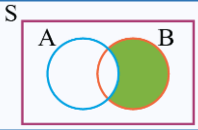
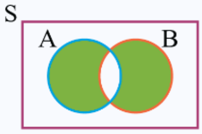
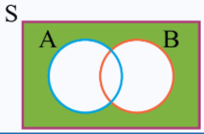
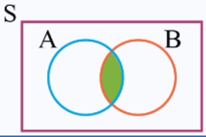
$$\underbrace{|\bar{A}\cap\bar{B}| = |S| - (|A| + |B| - |A\cap B|)}_{(۰/۵)} = ۹۰۰ - (۶۴۸ + ۶۴۸ - ۴۴۸) = ۵۲ \quad (۰/۲۵)$$

۱/۵

۲۰ شو

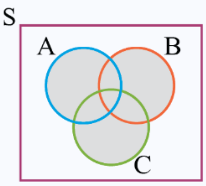
مجموعه‌ها:

نکته ۱: اگر A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه متناهی S باشند:

تعریف	رابطه	نمودار
تعداد عضوهایی که در A یا B هستند. (حداقل در یکی از مجموعه‌های A یا B وجود دارند.)	$\|A\cup B\|=\|A\|+\|B\|-\|A\cap B\|$	
تعداد عضوهایی که عضو A هستند ولی عضو B نیستند. (فقط عضو A هستند.)	$\|A-B\|=\|A\|-\|A\cap B\|$	
تعداد عضوهایی که عضو B هستند ولی عضو A نیستند. (فقط عضو B هستند.)	$\|B-A\|=\|B\|-\|A\cap B\|$	
تعداد عضوهایی که فقط در یکی از مجموعه‌ها هستند. (فقط در A یا فقط در B)	$\|A-B\|+\|B-A\|$	
تعداد عضوهایی که نه در A و نه در B هستند. (در هیچ‌یک از مجموعه‌های A و B نیستند.)	$\|\overline{A\cup B}\|=\|\bar{A}\cap\bar{B}\|=\|S\|-\|A\cup B\|$	
تعداد عضوهایی که هم در A و هم در B هستند.	$\|A\cap B\|$	

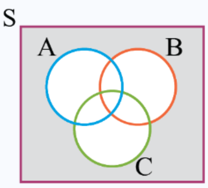
نکته ۲: اگر A، B و C زیرمجموعه‌هایی از مجموعه متناهی S باشند:

تعداد عضوهایی که در A یا B یا C هستند، برابر است با:



$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap C|-|A\cap B|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

تعداد عضوهایی که نه در A و نه در B و نه در C هستند (در هیچ‌یک از مجموعه‌ها وجود ندارند) برابر است با:



$$|\overline{A\cup B\cup C}|=|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}|=|S|-|A\cup B\cup C|$$

نکته ۳: مجموعه $S=\{1,2,3,\dots,n\}$ مفروض است:

تعداد عضوهایی از S که بر a بخش‌پذیر هستند برابر است با: $\left[\dfrac{n}{a}\right]$

تعداد عضوهایی از S که بر a و بر b بخش‌پذیر هستند برابر است با: $\left[\dfrac{n}{[a,b]}\right]$

توجه: $[a,b]$، ک.م.م دو عدد a و b است.

مثال: در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می‌کنند. اگر بدانیم ۳ نفر هم فوتبال، هم والیبال و هم بسکتبال بازی می‌کنند و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی کنند، مشخص کنید چند نفر فقط در یک رشته بازی می‌کنند؟

$|F|=۱۵$ فقط فوتبال $=|F|-|F\cap V|-|F\cap B|+|F\cap B\cap V|=۱۵-۵-۳+۳=۱۰$

$|V|=۱۱$ فقط والیبال $=|V|-|F\cap V|-|V\cap B|+|F\cap B\cap V|=۱۱-۵-۶+۳=۳$

$|B|=۹$ فقط بسکتبال $=|B|-|F\cap B|-|V\cap B|+|F\cap B\cap V|=۹-۳-۶+۳=۳$

فقط در یک رشته $=۱۰+۳+۳=۱۶$

مثال: در یک کلاس ۲۵ نفری، ۱۵ نفر فوتبال و ۱۴ نفر والیبال بازی می‌کنند. مشخص کنید چند نفر نه فوتبال بازی می‌کنند و نه والیبال به شرط آن‌که بدانیم ۹ نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می‌کنند.

$$\left|\overline{F\cup V}\right|=|S|-|F\cup V|=۲۵-(۱۵+۱۴-۹)=۵$$

مثال: چند عدد طبیعی مانند n به‌طوری که $۱\le n\le ۴۰۰$ وجود دارد که:

الف) بر ۵ یا ۷ بخش‌پذیر باشند.

$$A=\{n\in\mathbb{N}\,|\,۱\le n\le ۴۰۰\,,\,n=۵k\}\Rightarrow |A|=\left[\frac{۴۰۰}{۵}\right]=۸۰$$

$$B=\{n\in\mathbb{N}\,|\,۱\le n\le ۴۰۰\,,\,n=۷k\}\Rightarrow |B|=\left[\frac{۴۰۰}{۷}\right]=۵۷$$

$$A\cap B=\{n\in\mathbb{N}\,|\,۱\le n\le ۴۰۰\,,\,n=۳۵k\}\Rightarrow |A\cap B|=\left[\frac{۴۰۰}{۳۵}\right]=۱۱$$

$$\Rightarrow |A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=۸۰+۵۷-۱۱=۱۲۶$$

ب) بر ۵ بخش‌پذیر است ولی بر ۷ بخش‌پذیر نیست.

$$|A\cap B'|=|A-B|=|A|-|A\cap B|=۸۰-۱۱=۶۹$$

پ) نه بر ۵ و نه بر ۷ بخش‌پذیر باشند. (بر هیچ‌یک از اعداد ۵ و ۷ بخش‌پذیر نباشند.)

$$\left|\overline{A\cup B}\right|=|S|-|A\cup B|=۴۰۰-(۸۰+۵۷-۱۱)=۲۷۴$$

ت) فقط بر یکی از اعداد ۵ یا ۷ بخش‌پذیر باشند.

$$|A-B|+|B-A|=|A\cup B|-|A\cap B|=|A|+|B|-۲|A\cap B|=۸۰+۵۷-۲(۱۱)=۱۱۵$$

مثال: به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط آن‌که به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده باشیم؟ (راه‌حل نوشته شود)

این سؤال رو جور دیگه‌ای هم میشه طرح کرد، یعنی به جای این سؤال می‌تونن از ما تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی رو بپرسن؛ بریم که حلش کنیم.

روش اول: با استفاده از اصل شمول و عدم شمول:

$$A_i=\{f:A\to B\,|\,f(a_i)\ne b_j\ \ ,\ i=۱,۲,۳,۴\ \ ,\ j=۱,۲,۳\}$$

$$A=\{a_۱,a_۲,a_۳,a_۴\}$$

$$B=\{b_۱,b_۲,b_۳\}$$

$$|S|=۳^۴=۸۱ \qquad |A_۱|=|A_۲|=|A_۳|=۲^۴=۱۶$$

$$|A_۱\cap A_۲|=|A_۱\cap A_۳|=|A_۲\cap A_۳|=۱^۴=۱ \qquad |A_۱\cap A_۲\cap A_۳|=۰$$

$$\Rightarrow \left|\overline{A_۱\cup A_۲\cup A_۳}\right|=|S|-|A_۱\cup A_۲\cup A_۳|=۸۱-\big((۳\times۱۶)-(۳\times۱)+۰\big)=۳۶$$

روش دوم: تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی برابر است با:

$$۳^n-۳(۲^n)+۳\xrightarrow{n=۴}۳^۴-۳(۲^۴)+۳=۸۱-۴۸+۳=۳۶$$

اگه همچین سؤالی مطرح شد من جای شما باشم هر دوتا روش رو می‌نویسم!

۱۷ ۱

مصحح شو:

$$\text{تعداد لانه‌ها} = n = ۳۲\times۳۱ = ۹۹۲ \quad (۰/۲۵)$$

$$= k+۱ = ۳ \Rightarrow k = ۲ \quad (۰/۲۵)$$

$$\text{تعداد کبوترها} = kn+۱ = (۲\times۹۹۲)+۱ = ۱۹۸۵ \quad (۰/۵)$$

اصل لانه کبوتری:

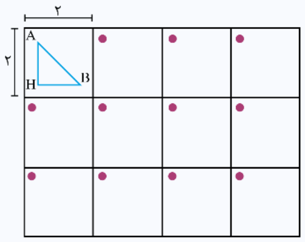
اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم $(m > n)$، و همه کبوترها درون لانه‌ها قرار بگیرند، در این‌صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار گرفته است.

مثال: ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی، حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان زوج است.

برای این‌که مجموع دو عدد زوج باشد، هردو عدد یا باید زوج باشند و یا هردو فرد. بنابراین تعداد لانه‌ها برابر ۲ و تعداد کبوترها ۳ است.

طبق اصل لانه کبوتری حداقل یک لانه وجود دارد که دو کبوتر در آن قرار می‌گیرد یعنی حداقل دو عدد طبیعی از بین سه عدد وجود دارد که مجموعشان زوج خواهد شد.

مثال: ۱۳ نقطه درون یک مستطیل ۸×۶ قرار دارند، نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارند که فاصله آن‌ها از هم، کم‌تر از $\sqrt{۸}$ باشد.



$\text{تعداد لانه‌ها} = ۱۲$

$\text{تعداد کبوترها} = ۱۳$

طبق اصل لانه کبوتری دو نقطه مانند A و B در یک لانه جای می‌گیرند پس:

$$\begin{matrix} AH < ۲ \\ BH < ۲ \end{matrix} \Rightarrow AH^۲ + BH^۲ < ۸ \Rightarrow AB^۲ < ۸ \Rightarrow AB < \sqrt{۸}$$

مثال: مجموعه اعداد $A = \{۱,۲,۳,\ldots,۸۴\}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید هر زیرمجموعه ۴۳ عضوی از A دارای ۲ عضو است که مجموعشان برابر ۸۵ است.

$\text{تعداد کبوترها} = ۴۳$

$$\text{تعداد لانه‌ها} = ۴۲ \xrightarrow{\text{ببینید}} \underbrace{\qquad}_{۱,۸۴}\ ,\ \underbrace{\qquad}_{۲,۸۳}\ ,\ \underbrace{\qquad}_{۳,۸۲}\ ,\ \cdots\ ,\ \underbrace{\qquad}_{۴۲,۴۳}$$

چنان‌چه قرار باشد کبوترها لانه‌ها را اشغال کنند، آن‌گاه طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو عدد وجود دارد که در یک لانه جای می‌گیرند و مجموعشان برابر ۸۵ است.

تعمیم اصل لانه کبوتری:

هرگاه $(kn+۱)$ کبوتر یا بیش‌تر در n لانه قرار بگیرند، در این‌صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل $(k+۱)$ کبوتر در آن قرار گرفته است.

مثال: ۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟

$$k+۱ = ۵ \Rightarrow k = ۴$$

$$kn+۱ = ۵۴ \xrightarrow{k=۴} ۴n+۱ = ۵۴ \Rightarrow ۴n = ۵۳ \Rightarrow n = \left[\frac{۵۳}{۴}\right] = ۱۳$$

مثال: ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش‌آموز مشغول به تحصیل باشند لااقل ۷ نفر از آن‌ها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

$\text{تعداد کبوترها} = ۵۰۵$

$$\text{تعداد لانه‌ها} = \text{تعداد روزهای هفته} \times \text{تعداد ماه‌های سال} \Rightarrow n = ۷\times۱۲ = ۸۴$$

مطابق تعمیم اصل لانه کبوتری:

$$\text{تعداد کبوترها} = kn+۱ \xrightarrow{n=۸۴} ۵۰۵ = ۸۴k+۱ \Rightarrow k = ۶ \Rightarrow k+۱ = ۷$$

در این‌صورت لانه‌ای وجود دارد که لااقل ۷ کبوتر در آن قرار می‌گیرند. یعنی حداقل ۷ نفر از دانش‌آموزان روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

۲۰ موفق باشید.